

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| Notation et conventions | 2 |
| 1 Quelques résultats préliminaires | 3 |
| 1.1 Inégalité de Hardy et fonction maximale de Hardy-Littlewood | 3 |
| 1.2 Décomposition de Littlewood-Paley | 8 |
| 2 Espaces de type de Besov - Triebel-Lizorkin | 10 |
| 2.1 Définition et quelques propriétés | 10 |
| 2.2 Espaces de suites $b_{p,q}^{s,\tau}$ et $f_{p,q}^{s,\tau}$ | 12 |
| 3 La décomposition atomique | 16 |
| 3.1 Définition et résultats | 16 |
| 3.2 La convergence | 25 |
| Conclusion | 28 |
| Bibliographie | 29 |

Remerciements

Introduction

Dans les dernières années, la décomposition atomique joue un rôle dans la théorie des espaces fonctionnelles.

Le but de ce mémoire est de présenter cette décomposition pour les espaces de type Besov $B_{p,q}^{s,\tau}$ et de type Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^{s,\tau}$.

Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, +\infty)$ et $0 \leq p, q < \infty$, on montre que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dans l'espace de type Besov $B_{p,q}^{s,\tau}$, ou dans l'espace de type Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^{s,\tau}$ est sous la forme

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \varrho_{vm} \quad \text{convergence dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

où ϱ_{vm} 's sont des atomes et (λ_{vm}) nombre complexe appartient à un espace de suites.

Le mémoire se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre, donne rappel la définition de la décomposition de Littlewood-Paley et quelques résultats qui seront utilisés dans la suite de cette mémoire.

Le deuxième chapitre, donne la définition et les propriétés des espaces $B_{p,q}^{s,\tau}$ et $F_{p,q}^{s,\tau}$, et l'espace de suites $b_{p,q}^{s,\tau}$ et $f_{p,q}^{s,\tau}$.

Dans le dernier chapitre, donne une décomposition atomique pour les espaces de type Triebel-Lizorkin et Besov, et la preuve de la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ du (1).

Notation et conventions

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$.
- La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ est notée $D^\alpha f$.
- Pour $j \in \mathbb{Z}$ on pose $j^+ = \max(j, 0)$.
- Soient A_1 et A_2 deux espaces quasi-normés, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$,

telle que

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1} \quad \forall f \in A_1.$$

- p' est l'exposant conjugué de p telle que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- $B(x, r)$ est la boule ouvert de centre x et de rayon r , défini par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}.$$

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette memoire.

1.1 Inégalité de Hardy et fonction maximale de Hardy-Littelwood

Dans cette section, nous présentons quelques résultats qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire.

Définition 1.1.1 Soient $s \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{Z}$, $J^+ = \max(J, 0)$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de suites ℓ_{q,J^+}^s est l'ensemble $\{f_j\}_{j \geq 0}$ à valeurs réelles ou complexes telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\{f_j\}_{j \geq J^+}\|_{\ell_{q,J^+}^s} = \left(\sum_{j \geq k} 2^{jsq} |f_j|^q \right)^{1/q}, \text{ si } 0 < q < \infty \\ \text{et} \\ \|\{f_j\}_{j \geq J^+}\|_{\ell_\infty} = \sup_{j \geq J^+} 2^{js} |f_j|. \text{ si } q = \infty \end{array} \right.$$

Remarque 1.1.1 Il est claire que $\ell_{q,0}^0 = \ell_q$ pour $0 < q \leq \infty$.

Définition 1.1.2 Soit $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On pose

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$ et $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leq p, q \leq \infty$ avec $1/p + 1/q = 1$. Soit f une fonction de $L^p(\Omega)$ et g dans $L^q(\Omega)$. Alors fg appartient à $L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

c'est l'inégalité de **Hölder**.

Proposition 1.1.1 Soient $0 < a < 1$, $J \in \mathbb{Z}$ et $0 < q \leq \infty$. Pour toute suite réelle à terme positive $\{\omega_j\}_{j \geq J^+}$ dans ℓ_{q, J^+}^0 , les suites

$$\delta_k = a^k \sum_{j=J^+}^k a^{-j} \omega_j \quad \text{et} \quad \eta_k = a^{-k} \sum_{j \geq k} a^j \omega_j, \quad k \geq J^+,$$

appartiennent à ℓ_{q, J^+}^0 , de plus, il existe une constante $c = c(a, q) > 0$ tel que

$$\|\{\delta_k\}_{k \geq J^+}\|_{\ell_{q, J^+}^0} + \|\{\eta_k\}_{k \geq J^+}\|_{\ell_{q, J^+}^0} \leq c \|\{\omega_j\}_{j \geq J^+}\|_{\ell_{q, J^+}^0}.$$

Preuve. On étudie deux cas.

Le cas $1 < q < \infty$. On peut écrire la suite $\{\delta_k\}$ sous la forme

$$\delta_k = \sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)/q} a^{(k-j)/q'} \omega_j.$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\delta_k^q \leq \left(\sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)} \omega_j^q \right) \left(\sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)} \right)^{q/q'},$$

Donc

$$\sum_{k \geq J^+} \delta_k^q \leq \left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^{q/q'} \sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(k-j)} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{j=J^+}^k a^{k-j} \omega_j^q \right) = \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left(\sum_{k \geq j} a^{k-j} \right) \leq \left(\sum_{i \geq 0} a^i \right) \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

Alors la somme de δ_k^q pour $k \geq J^+$ est majorée par

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^q \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

Ce qui donne

$$\| \{ \delta_k \}_{k \geq J^+} \|_{\ell_{q, J^+}^0} \leq \frac{1}{1-a} \| \{ \omega_j \}_{j \geq J^+} \|_{\ell_{q, J^+}^0}.$$

Pour $\{ \eta_k \}$, on peut écrire $\{ \eta_k \}$ sous la forme

$$\eta_k = \sum_{j \geq k} a^{(j-k)/q} a^{(j-k)/q'} \omega_j.$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\eta_k^q \leq \left(\sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \omega_j^q \right) \left(\sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \right)^{q/q'},$$

il vient que

$$\sum_{k \geq J^+} \eta_k^q \leq \left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^{q/q'} \sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{j \geq k} a^{(j-k)} \omega_j^q \right) &= \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left(\sum_{J^+ \leq k \leq j} a^{(j-k)} \right) \\ &\leq \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left(\sum_{i \geq 0} a^i \right), \end{aligned}$$

alors la somme de η_k^q pour $k \geq J^+$ est majorée par

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^q \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

ce qui donne

$$\| \{ \eta_k \}_{k \geq J^+} \mid \ell_{q, J^+}^0 \| \leq \frac{1}{1-a} \| \{ \omega_j \}_{j \geq J^+} \mid \ell_{q, J^+}^0 \|.$$

Le cas $0 < q \leq 1$. On a

$$\delta_k^q \leq \sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(k-j)q} \omega_j^q,$$

il vient que

$$\sum_{k \geq J^+} \delta_k^q \leq \sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(k-j)q} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{j=J^+}^k a^{(k-j)q} \omega_j^q \right) = \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left(\sum_{k \geq j} a^{(k-j)q} \right),$$

alors la somme de δ_k^q pour $k \geq J^+$ est majoré par

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^{iq} \right) \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right),$$

c'est-à-dire

$$\| \{ \delta_k \}_{k \geq J^+} \mid \ell_{q, J^+}^0 \| \leq \left(\frac{1}{1-a^q} \right)^{1/q} \| \{ \omega_j \}_{j \geq J^+} \mid \ell_{q, J^+}^0 \|.$$

Pour $\{ \eta_k \}$, on a

$$\eta_k^q \leq \sum_{j=J^+}^k a^{(j-k)q} \omega_j^q,$$

donc

$$\sum_{k \geq J^+} \eta_k^q \leq \sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{J^+ \leq j \leq k} a^{(j-k)q} \omega_j^q \right).$$

Comme

$$\sum_{k \geq J^+} \left(\sum_{j=J^+}^k a^{(j-k)q} \omega_j^q \right) = \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right) \left(\sum_{j=J^+}^k a^{(j-k)q} \right),$$

alors la somme de η_k^q pour $k \geq J^+$ est majorée par $\left(\sum_{i \geq 0} a^{iq} \right) \left(\sum_{j \geq J^+} \omega_j^q \right)$. Ce qui donne

$$\| \{ \eta_k \}_{k \geq J^+} \mid \ell_{q, J^+}^0 \| \leq \left(\frac{1}{1-a^q} \right)^{1/q} \| \{ \omega_j \}_{j \geq J^+} \mid \ell_{q, J^+}^0 \|.$$

Par les mêmes raisonnements, on peut démontrer le cas $q = \infty$. ■

Nous allons commencer à donner la définition de la fonction maximale de **Hardy-Littlewood**, qui joue un rôle très important en analyse harmonique.

Définition 1.1.3 Supposons que f est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R}^n , i.e. $f \in L^1_{loc}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction maximale de **Hardy-Littlewood** $\mathcal{M}f(x)$ est définie par

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy. \quad (1.1.1)$$

Remarque 1.1.2 La fonction maximale de **Hardy-Littlewood** n'est pas bornée sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ à lui-même. Nous ne considérons le cas $n = 1$. Prenez $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, alors pour tout $x \geq 1$, on a

$$\mathcal{M}f(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^{2x} f(y) dy = \frac{1}{2x},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}f(x) dx \geq \int_1^{\infty} \mathcal{M}f(x) dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x} dx = \infty.$$

Alors la fonction maximale \mathcal{M} n'est pas bornée sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. La fonction maximale \mathcal{M} est bornée sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on vérifie que $\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. On a

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy &= \|f\|_\infty \int_{B(x, r)} dy \quad \forall x, \forall r > 0 \\ &\leq |B(x, r)| \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

on divise sur $|B(x, r)|$ donc

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty.$$

Alors

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Théorème 1.1.1 Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n . Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ alors $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $C = C(n, p) > 0$ telle que $\|\mathcal{M}f\|_p \leq C \|f\|_p$.

1.2 Décomposition de Littlewood-Paley

Définition 1.2.1 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On définit la **transformée de Fourier** de f , la fonction notée \widehat{f} ou $\mathcal{F}(f)$ est définie pour toute $\xi \in \mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

On appelle transformée de Fourier **conjuguée** de f la fonction

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Nous allons définir maintenant les espaces de **Triebel-Lizorkin** qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Pour cela, on rappelle la définition de la décomposition de **Littlewood-Paley** d'une distribution tempérée.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que

- (i) $\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$.
- (ii) $\varphi(\xi) > 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$.
- (iii) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La construction de φ ne pose aucune difficulté, voire par exemple [1]. On pose

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi),$$

on obtient une fonction $\varphi_0 \in C^\infty$, portée par la boule $|\xi| < 3$. Dans tout ce qui suit, on fixe la partition de l'unité qui résulte

$$\sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'$, la décomposition de **Littlewood-Paley** de f est alors l'identité

$$f = \sum_{j \geq 0} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * f. \tag{1.1}$$

La série (1.1) converge au sens des distributions tempérées.

Lemme 1.2.1 Soit $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une résolution de l'umite et $R \in \mathbb{N}$. Alors il exist des fonction $\theta, \theta_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\text{supp } \theta, \text{supp } \theta_0 \subset \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \}, \quad (1.2.1)$$

avec:

$$|\mathcal{F}\theta_0(\xi)| > c_0 \quad \text{si } |\xi| \leq 2$$

$$|\mathcal{F}\theta(\xi)| > c \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \theta(x) dx = 0 \quad \text{si } 0 \leq |\alpha| \leq R, \quad (1.2.2)$$

telle que

$$\mathcal{F}\theta_0(\xi)\mathcal{F}\Psi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}\theta(2^{-j}\xi)\mathcal{F}\Psi(2^{-j}\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions $\Psi, \Psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont définies par

$$\mathcal{F}\Psi_0(\xi) = \frac{\varphi_0(\xi)}{\mathcal{F}\theta_0(\xi)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\Psi(\xi) = \frac{\varphi_1(2\xi)}{\mathcal{F}\theta(\xi)}.$$

Chapitre 2

Espaces de type de Besov - Triebel-Lizorkin

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la définition des espaces $B_{p,q}^{s,\tau}$ et $F_{p,q}^{s,\tau}$, ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, toutes les démonstrations se trouvent dans [1], [9], [10] et [11].

2.1 Définition et quelques propriétés

Définition 2.1.1 Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $0 < q, p \leq \infty$.

(i) L'espace de type de **Besov**, noté $B_{p,q}^{s,\tau}$, est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} 2^{jsq} \|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_j * f) \mid L^p(B_J)\|^q \right)^{1/q} < \infty,$$

où le sup est sur tout $J \in \mathbb{Z}$ et toutes les boules B_J de \mathbb{R}^n de rayon 2^{-J} . Dans le cas limite $q = \infty$ la modification habituelle est nécessaire.

(ii) Soit $0 < p < \infty$. L'espace de type **Triebel-Lizorkin**, noté $F_{p,q}^{s,\tau}$, est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left(\sum_{j=J^+}^{+\infty} 2^{jsq} |\mathcal{F}^{-1}\varphi_j * f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \mid L^p(B_J) \right\| < \infty,$$

où le sup est sur tout $J \in \mathbb{Z}$ et toutes les boules B_J de \mathbb{R}^n de rayon 2^{-J} . Dans le cas limite $q = \infty$ la modification habituelle est nécessaire.

Remarque 2.1.1 (i) La définition indépendante du choix de la décomposition de **Littlewood-Paley**.

(ii) $F_{p,q}^{s,\tau}$ et $B_{p,q}^{s,\tau}$ sont des espaces de quasi-Banach (espaces de Banach si $\min(p, q) \geq 1$).

(iii) $F_{p,q}^{s,0} = F_{p,q}^s$, l'espace de **Triebel-Lizorkin**.

(iv) $B_{p,q}^{s,0} = B_{p,q}^s$, l'espace de **Besov**.

(v) On a

$$\begin{aligned} B_{p,q}^{s,\tau} &= B_{\infty,\infty}^{s+n(\tau-\frac{1}{p})} \quad \text{si} \quad 0 < p \leq \infty, s \in \mathbb{R}, \\ F_{p,q}^{s,\tau} &= F_{\infty,\infty}^{s+n(\tau-\frac{1}{p})} \quad \text{si} \quad 0 < p < \infty, s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

si $\tau > \frac{1}{p}$, $0 < q \leq \infty$ où $\tau = \frac{1}{p}$ et $q = \infty$, voir [10].

Soit $k_0, k_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $S \geq -1$ un entier telle que pour $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}k_0(\xi)| &> 0 \quad \text{pour} \quad |\xi| < 2\varepsilon \\ |\mathcal{F}k_1(\xi)| &> 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\varepsilon}{2} < |\xi| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha k_1(x) dx = 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq S. \quad (2.1.1)$$

Nous rappelons la notation

$$k_t(x) = t^{-n} k_t(t^{-1}x), \quad k_j(x) = k_{2^{-j}}(x) \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad j \geq 1.$$

Pour tout $a > 0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on note (fonction maximale de **Peetre**)

$$k_j^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|k_j * f(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

$k_j * f$ s'appelle la moyenne locale. Nous présentons maintenant une caractérisation fondamentale de $B_{p,q}^{s,\tau}$ et $F_{p,q}^{s,\tau}$.

Théorème 2.1.1 Soit $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0; +\infty)$ et $p, q \in]0; +\infty]$ et $s < S + 1 - \tau n$.

(i) Si $a > \frac{n}{p}$, alors

$$\|f\|'_{B_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{j=J^+}^{+\infty} 2^{jsq} \|(k_j^{*,a} f) \mid L^p(B_J)\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

est une quasi-norme équivalente dans $B_{p,q}^{s,\tau}$. Dans le cas limite $q = \infty$, la modification habituelle est nécessaire.

(ii) Si $0 < p < \infty$ et $a > \frac{n}{\min(p,q)}$, alors

$$\|f\|'_{F_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left(\sum_{j=J^+}^{+\infty} 2^{jsq} |k_j^{*,a} f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \mid L^p(B_J) \right\|,$$

est une quasi-norme équivalente dans $F_{p,q}^{s,\tau}$. Dans le cas limite $q = \infty$, la modification habituelle est nécessaire.

2.2 Espaces de suites $b_{p,q}^{s,\tau}$ et $f_{p,q}^{s,\tau}$

Soient $v \in \mathbb{N}_0$ et $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Q_{vm} est les cubes dyadique dans \mathbb{R}^n

$$Q_{vm} = \{(x_1, \dots, x_n) : m_i \leq 2^v x_i < m_i + 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Si Q_{vm} est un cube dyadique dans \mathbb{R}^n et $c > 0$, alors cQ_{vm} est le cube dans \mathbb{R}^n de même centre avec Q_{vm} de longueur $c 2^{-v}$, χ_{vm} est la fonction caractéristique sur Q_{vm} .

Définition 2.2.1 Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, +\infty)$ et $0 < p, q \leq +\infty$. Pour toutes les suites complexes de valeur $\lambda = \{\lambda_{vm} \in \mathbb{C} : v \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n\}$ on pose

$$b_{p,q}^{s,\tau} = \left\{ \lambda : \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} < \infty \right\},$$

avec

$$\|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{v=J^+}^{+\infty} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} \lambda_{vm} \chi_{vm} \mid L^p(B_J) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

et (où $0 < p < +\infty$)

$$f_{p,q}^{s,\tau} = \left\{ \lambda : \|\lambda\|_{f_{p,q}^{s,\tau}} < \infty \right\},$$

avec

$$\|\lambda\|_{f_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left(\sum_{v=J^+}^{+\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \middle| L^p(B_J) \right\|.$$

Définition 2.2.2 Soit $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0; +\infty)$ et $0 < p, q \leq +\infty$. pour toutes les suites complexes de valeur $\lambda = \{\lambda_{vm} \in \mathbb{C} : v \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n\}$ défine par

$$\tilde{b}_{p,q}^{s,\tau} = \left\{ \lambda : \|\lambda\|_{\tilde{b}_{p,q}^{s,\tau}} < \infty \right\},$$

où

$$\|\lambda\|_{\tilde{b}_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{Q_J} \frac{1}{|Q_J|^\tau} \left(\sum_{v=J^+}^{+\infty} 2^{v(s - \frac{n}{p})q} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{vm} \subset Q_J}} |\lambda_{vm}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

et (où $0 < p < +\infty$)

$$\tilde{f}_{p,q}^{s,\tau} = \left\{ \lambda : \|\lambda\|_{\tilde{f}_{p,q}^{s,\tau}} < \infty \right\},$$

où

$$\|\lambda\|_{\tilde{f}_{p,q}^{s,\tau}} = \sup_{Q_J} \frac{1}{|Q_J|^\tau} \left\| \left(\sum_{v=J^+}^{+\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \middle| L^p(Q_J) \right\|.$$

Où le sup est prise sur tous les $J \in \mathbb{Z}$ et tous les cubes dyadiques Q_J de côté 2^{-J} . Par les propriétés des cubes dyadiques, il existe $d, k \in \mathbb{N}$ ne dépendant pas de J et m telles que

$$Q_{J,m} \subset \bigcup_{\iota=1}^d B_J^\iota \quad \text{et} \quad B_J \subset \bigcup_{\iota=1}^k Q_J^\iota.$$

Ici, B_J^ι est une boule de centre 2^{-J} et Q_J^ι est un cube dyadique de côté 2^{-J} . Par $\chi_{Q_J^\iota}$ on note la fonction caractéristique du cube Q_J^ι , de cela et du fait que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \chi_{vm} \chi_{Q_J^l} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{v,m} \subset Q_J^l}} \lambda_{vm} \chi_{vm}, \quad v \geq J^+,$$

il en résulte que pour toutes les suites complexes $\{\lambda_{vm}\}_{v \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \chi_{vm} \chi_{B_J} \right\|_p &\leq c \sum_{l=1}^k \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \chi_{vm} \chi_{Q_J^l} \right\|_p \\ &= c \sum_{l=1}^k \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{v,m} \subset Q_J^l}} \lambda_{vm} \chi_{vm} \right\|_p \\ &= c \sum_{l=1}^k 2^{-vn/p} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{v,m} \subset Q_J^l}} |\lambda_{vm}|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} \leq c \|\lambda\|_{\tilde{b}_{p,q}^{s,\tau}}.$$

Maintenant, pour tout $v \geq J^+$ et n'importe quel cube dyadique Q_J . On a

$$\begin{aligned} 2^{-vm} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{v,m} \subset Q_J}} |\lambda_{vm}|^p &= \int_{Q_J} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{vm}|^p \chi_{vm}(y) dy \\ &= \int_{Q_J} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \chi_{vm}(y) \right|^p dy \\ &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \chi_{vm} \chi_{Q_J} \right\|_p^p. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\lambda\|_{\tilde{b}_{p,q}^{s,\tau}} \leq c \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}.$$

L'équivalence entre $\|\cdot\|_{\tilde{b}_{p,q}^{s,\tau}}$ et $\|\cdot\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}$ est évident.

Proposition 2.2.1 Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $0 < p, q, r \leq +\infty$ et $-\infty < s_0 < s_1 < +\infty$.

(i) Si $0 < p < \infty$, alors

$$\tilde{b}_{p, \min(p,q)}^{s,\tau} \hookrightarrow \tilde{f}_{p,q}^{s,\tau} \hookrightarrow \tilde{b}_{p, \max(p,q)}^{s,\tau}.$$

(ii) Si $0 < p_0 < p_1 < \infty$ telles que $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors

$$\widetilde{b}_{p_0, q}^{s_0, \tau} \hookrightarrow \widetilde{b}_{p_1, q}^{s_1, \tau} .$$

(iii) Si $0 < p_0 < p_1 < \infty$ telles que $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$, alors

$$\widetilde{f}_{p_0, q}^{s_0, \tau} \hookrightarrow \widetilde{f}_{p_1, q}^{s_1, \tau} .$$

Evidemment, $\widetilde{f}_{p,q}^{s,\tau}$, $\widetilde{b}_{p,q}^{s,\tau}$ peut être remplacé par $b_{p,q}^{s,\tau}$ et $f_{p,q}^{s,\tau}$ respectivement.

Chapitre 3

La décomposition atomique

Le but de ce chapitre est de présenter une décomposition dite atomique, pour les espaces de type de **Triebel-Lizorkin** et **Besov**.

3.1 Définition et résultats

Nous définissons les atomes qui sont les éléments constitutifs de la décomposition atomique.

Définition 3.1.1 Soit $K, L \in \mathbb{N}_0$, et soit $\gamma > 1$. Une fonction $a \in C^k(\mathbb{R}^n)$ est appelée $[K, L]$ -atome centrée sur Q_{vm} , $v \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$ si

$$\text{supp } a \subseteq \gamma Q_{vm} \tag{3.1.1}$$

$$|D^\alpha a(x)| \leq 2^{v|\alpha|} \text{ pour } 0 \leq |\alpha| \leq K, x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a(x) dx = 0 \text{ pour } 0 \leq |\alpha| < L \text{ et } v \geq 1. \tag{3.1.2}$$

Si l'atome a est situé à Q_{vm} , alors nous le noterons par a_{vm} . Pour $v = 0$ ou $L = 0$, il n'y a pas de conditions de moment **(3.1.2)** requises.

Lemme 3.1.1 Soit $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une partition de l'unité et soit $\{\varrho_{vm}\}_{v \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n}$ des $[K, L]$ -atomes. Alors

$$|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j * \varrho_{vm}(x)| \leq c 2^{(v-j)K} (1 + 2^v |x - 2^{-v}m|)^{-M} \quad \text{si } v \leq j,$$

et

$$|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j * \varrho_{vm}(x)| \leq c 2^{(j-v)(L+n+1)} (1 + 2^j |x - 2^{-v}m|)^{-M} \quad \text{si } v \geq j,$$

où M est suffisamment grand.

Théorème 3.1.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, +\infty)$. Soit $0 < p \leq +\infty$, respectivement $0 < p < \infty$, $0 < q \leq +\infty$ et $K, L \in \mathbb{N}_0$ telles que*

$$K > s + \tau n, \tag{3.1.3}$$

et

$$L > n \left(\frac{1}{\min(1, p)} - 1 \right) - 1 - s, \tag{3.1.4}$$

respectivement

$$L > n \left(\frac{1}{\min(1, p, q)} - 1 \right) - 1 - s. \tag{3.1.5}$$

Alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $B_{p,q}^{s,\tau}$, respectivement à $F_{p,q}^{s,\tau}$ si et seulement si elle peut être représentée par

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \varrho_{vm}, \tag{3.1.6}$$

convergeant dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Où ϱ_{vm} sont $[K, L]$ -atomes et $\lambda = \{\lambda_{vm} \in \mathbb{C} : v \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n\} \in b_{p,q}^{s,\tau}$, respectivement $\lambda \in f_{p,q}^{s,\tau}$. De plus, $\inf \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}$, respectivement $\inf \|\lambda\|_{f_{p,q}^{s,\tau}}$, où l'infimum est sur les représentations admissibles (3.1.6), est une quasi-norme équivalente pour $B_{p,q}^{s,\tau}$, respectivement $F_{p,q}^{s,\tau}$.

Preuve.

Etape 1. Soit θ, θ_0, ψ_0 et ψ les fonctions introduites dans le **lemme 1.2.1**. On a

$$f = \theta_0 * \psi_0 * f + \sum_{v=1}^{\infty} \theta_v * \psi_v * f,$$

et en utilisant la définition des cubes Q_{vm} on obtient

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_{vm}} \theta(x-y) \psi_0 * f(y) dy + \sum_{v=1}^{\infty} 2^{vm} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_{vm}} \theta(2^v(x-y)) \psi_v * f(y) dy,$$

ou la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Nous définissons pour chaque $v \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\lambda_{vm} = C_\theta \sup_{y \in Q_{vm}} |\psi_v * f(y)|, \quad (3.1.7)$$

où

$$C_\theta = \max \left\{ \sup_{|y| \leq 1} |D^\alpha \theta(y)|, \quad |\alpha| \leq K \right\}.$$

Définir aussi

$$\varrho_{vm}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{vm}} 2^{vm} \int_{Q_{vm}} \theta(2^v(x-y)) \psi_v * f(y) dy & \text{si } \lambda_{vm} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_{vm} = 0 \end{cases}. \quad (3.1.8)$$

Si $\lambda_{vm} \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varrho_{vm}(x)| &\leq \frac{2^{v(n+|\alpha|)}}{C_\theta} \int_{Q_{vm}} |(D^\alpha \theta)(2^v(x-y))| |\psi_v * f(y)| dy \left(\sup_{y \in Q_{vm}} |\psi_v * f(y)| \right)^{-1} \\ &\leq \frac{2^{v(n+|\alpha|)}}{C_\theta} \int_{Q_{vm}} |(D^\alpha \theta)(2^v(x-y))| dy \\ &\leq 2^{v(n+|\alpha|)} |Q_{vm}| \\ &\leq 2^{v|\alpha|}. \end{aligned}$$

Les modifications pour les termes avec $v = 0$ sont évidents.

Etape 2. Ensuite, nous montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telles que

$$\|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}}.$$

Comme dans le **F**-cas. Pour cette raison, nous exploitons les quasi-normes équivalentes données dans le **théorème 2.1.1** impliquant la fonction maximale de **Peetre**. Pour toute

$x, y \in Q_{vm}$ et toute $v \geq J^+$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \chi_{vm}(x) &= C_\theta \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{y \in Q_{vm}} |\psi_v * f(y)| \chi_{vm}(x) \\
 &\leq c \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{|z| \leq c 2^{-v}} \frac{|\psi_v * f(x - z)|}{(1 + 2^v |z|)^a} (1 + 2^v |z|)^a \chi_{vm}(x) \\
 &\leq c \psi_v^{*,a} f(x) \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{vm}(x) \\
 &= c \psi_v^{*,a} f(x),
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

où nous avons utilisé $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{vm}(x) = 1$. Cette estimation et son équivalent pour $v = 0$ (qui peut être obtenu par un calcul similaire) donnent

$$\begin{aligned}
 \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} &\leq c \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{v=J^+}^{+\infty} 2^{vsq} \|\psi_v^{*,a} f\|_{L_p(B_J)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq c \|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}}.
 \end{aligned}$$

En prenant $a > \frac{n}{p}$. Ceci complète la preuve de l'inégalité dans le **B**-cas. Concernant le **F**-cas, (3.1.9) implique

$$\begin{aligned}
 \|\lambda\|_{f_{p,q}^{s,\tau}} &\leq c \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left\| \left(\sum_{v=j^+}^{+\infty} 2^{vsq} (\psi_v^{*,a} f)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(B_J)} \\
 &\leq c \|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}},
 \end{aligned}$$

où en prenant $a > \frac{n}{\min(p,q)}$.

Etape 3. Suppose que f peut être représenté par (3.1.6), avec K et L satisfaisant (3.1.3) et (3.1.4), respectivement. Nous examinons d'abord le **B**-cas et montrons que $f \in B_{p,q}^{s,\tau}$ et que pour certains $c > 0$,

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}} \leq c \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}.$$

On divise la somme (3.1.6) en fonction de J^+ , $j \in \mathbb{N}_0$ en trois parties,

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} a_{vm} = \sum_{v=0}^{J^+-1} \dots + \sum_{v=J^+}^j \dots + \sum_{v=j+1}^{\infty} \dots$$

Ici, on met $\sum_{v=0}^{J^+-1} \dots = 0$. Si $J^+ = 0$. Soit $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une résolution d'unité et soit B_J une boule centré sur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon 2^{-J} , $J \in \mathbb{Z}$. On a

$$\left(\sum_{j=J^+}^{+\infty} 2^{jsq} \left\| \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * f \right\|_{L^p(B_J)}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

qui peut être estimé par

$$\begin{aligned} & c \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \sum_{v=0}^{J^+} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * \varrho_{vm} \mid L^p(B_J) \right\|^q \right)^{1/q} \\ & + c \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \sum_{v=J^+}^j \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * \varrho_{vm} \mid L^p(B_J) \right\|^q \right)^{1/q} \\ & + c \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \sum_{v=j+1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * \varrho_{vm} \mid L^p(B_J) \right\|^q \right)^{1/q} \\ & = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \end{aligned}$$

Estimation de σ_1 . Dans le **lemme 3.1.1** nous avons pour tout M suffisamment grand et tout $v \leq j$,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{js} |\lambda_{vm}| \left| \mathcal{F}^{-1} \varphi_j * \varrho_{vm}(x) \right| \leq c 2^{(v-j)(K-s)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |x - 2^{-v}m|)^{-M}.$$

Nous suppose que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |x - 2^{-v}m|)^{-M} \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)k} \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{v-k-cn}} \right)(x), \quad (3.1.10)$$

pour toute $0 < t \leq 1$ et $x \in B_J$. Donc, avec $0 < t < \min(1, p)$

$$2^{jst} \left\| \sum_{v=0}^{J^+} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm}^{-1} \mathcal{F} \varphi_j * \varrho_{vm} \right\|_{L^p(B_J)}^t,$$

peut être estimé par

$$\begin{aligned} & c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)tk} \sum_{v=0}^{J^+} 2^{(v-j)(K-s)t} \left\| \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{v-k-c_n}} \right) \right\|_p^t \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)tk} \sum_{v=0}^{J^+} 2^{(v-j)(K-s)t} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \right\|_{L^p(B_{v-k-c_n})}^t, \end{aligned}$$

car la fonction maximal de **Hardy-Littlewood** \mathcal{M}_t est borné sur L^p . La dernière expression peut être estimé par

$$\begin{aligned} & c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)tk} \sum_{v=0}^{J^+} 2^{(v-j)(K-s)t} \sup_{i \geq v} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{is} |\lambda_{im}| \chi_{im} \right\|_{L^p(B_{v-k-c_n})}^t \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)tk} \sum_{v=0}^{J^+} 2^{(v-j)(K-s)t} \sup_{i \geq (v-k-c_n)^+} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{is} |\lambda_{im}| \chi_{im} \right\|_{L^p(B_{v-k-c_n})}^t. \end{aligned}$$

Rappelant la définition des espaces $b_{p,\infty}^{s,\tau}$, la partie droite de la dernière expression est estimée par

$$\begin{aligned} & c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{J^+} 2^{(\tau n + n/t - M)tk} 2^{(v-j)(K-s)t - v\tau nt} \|\lambda\|_{b_{p,\infty}^{s,\tau}}^t \\ & \leq c 2^{(J-j)(K-s-\tau n)t - \tau n j t} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}^t, \end{aligned}$$

la dernière estimation suit en prenant M suffisamment grand, telles que $M > \frac{n}{t+\tau n}$, et l'hypothèse **(3.1.3)**. Il en résulte que

$$\sigma_1 \leq c \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} 2^{(J-j)(K-s-\tau n)q - \tau n j q} \right)^{1/q} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} \leq c 2^{-J\tau n} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}, \quad (3.1.11)$$

encore en utilisant **(3.1.3)** et la constante $c > 0$ est indépendant de J . Prouvons **(3.1.10)**.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$ nous définissons

$$\Omega_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 2^{k-1} < 2^v |x - 2^{-v}m| \leq 2^k\},$$

et

$$\Omega_0 = \{m \in \mathbb{Z}^n : 2^v |x - 2^{-v}m| \leq 1\}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |x - 2^{-v}m|)^{-M} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in \Omega_k} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |x - 2^{-v}m|)^{-M} \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-Mk} \sum_{m \in \Omega_k} 2^{vs} |\lambda_{vm}|. \end{aligned}$$

Pour toute $0 < t \leq 1$, la dernière expression est délimitée par

$$\begin{aligned} &c \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-Mk} \left(\sum_{m \in \Omega_k} 2^{vst} |\lambda_{vm}|^t \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= c \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-(\frac{n}{t-M})k} \left(2^{(v-k)n} \int_{\cup_{m \in \Omega_k} Q_{vm}} \left(\sum_{m \in \Omega_k} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm}(y) \right)^t dy \right)^{\frac{1}{t}}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Soit $y \in \cup_{m \in \Omega_k} Q_{vm}$. Alors $y \in Q_{vm}$ pour certains $m \in \Omega_k$ et $2^{k-1} < 2^v |x - 2^{-v}m| \leq 2^k$ à partir de cela suit que

$$|y - x| \leq |y - 2^v m| + |x - 2^{-v}m| < n 2^{-v} + 2^{k-v} < 2^{k-v-h_n}, \quad h_n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que y est situé dans une boule $B(x, 2^{k-v-h_n})$. En outre, du fait que

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < 2^{k-v-c_n} + 2^{-J} < 2^{k-v-c_n}, \quad c_n \in \mathbb{N},$$

nous avons que y est situé dans une boule B_{v-k-c_n} . Par conséquent, (3.1.12) ne dépasse pas

$$c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)k} \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{v-k-c_n}} \right)(x),$$

où $c > 0$ ne pas dépendre de v, j et J .

Estimation de σ_2 . Les mêmes arguments utilisés ci-dessus donnent

$$\begin{aligned} &\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |x - 2^{-v}m|)^{-M} \\ &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)k} \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{J-k-c_n}} \right)(x), \end{aligned}$$

pour toute $x \in B_J$ et $0 < t < \min(1, p)$, où $c > 0$ ne pas dépendre de v, j et J . Par le **Proposition 1.1.1** (avec l'aide de **(3.1.3)**) et la continuité de la fonction maximale de **Hardy-Littlewood** \mathcal{M}_t sur L^p on obtient pour toute M suffisamment grand pour que $M > n/t + \tau n$,

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_2)^d \\
 & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)kd} \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} \left(\sum_{v=J^+}^j 2^{(v-j)(K-s)d} \left\| \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{J-k-c_n}} \right) \right\|_p^d \right)^{q/d} \right)^{d/q} \\
 & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)kd} \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} \left\| \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{js} |\lambda_{jm}| \chi_{jm} \chi_{B_{J-k-c_n}} \right) \right\|_p^q \right)^{d/q} \\
 & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)kd} \left(\sum_{j=(J-k-c_n)^+}^{\infty} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{js} |\lambda_{jm}| \chi_{jm} \right\|_{L^p(B_{J-k-c_n})}^q \right)^{d/q} \\
 & \leq c 2^{-J\tau nd} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M+\tau n)kd} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}^d \\
 & \leq c 2^{-J\tau nd} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}^d, \tag{3.1.13}
 \end{aligned}$$

où $d = \min(1, p, q)$.

Estimation de σ_3 . D'après le **lemme 3.1.1**, nous avons pour tout M suffisamment grand.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{js} |\lambda_{vm}| |\mathcal{F}\varphi_j * \varrho_{vm}(x)| \\
 & \leq c 2^{(j-v)(L+n+1+s)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^j |x - 2^{-v}m|)^{-M}.
 \end{aligned}$$

Soit $0 < t < \min(1, p)$ être un nombre réel tel que $L > n/t - 1 - n - s$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$ nous définissons

$$\Omega_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 2^{k-1} < 2^j |x - 2^{-v}m| \leq 2^{k-1}\},$$

et

$$\Omega_0 = \{m \in \mathbb{Z}^n : 2^j |x - 2^{-v}m| \leq 1\}.$$

En utilisant combinaison des arguments utilisés dans l'estimation de σ_1 , On arrive à l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| (1 + 2^j |x - 2^{-v}m|)^{-M} \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)k} \left(2^{(v-k)n} \int_{\cup_{m \in \Omega_k} Q_{vm}} \left(\sum_{m \in \Omega_k} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm}(y) \right)^t dy \right)^{1/t}. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Soit $y \in \cup_{m \in \Omega_k} Q_{vm}$, on trouve $y \in Q_{vm}$ pour certains $m \in \Omega_k$ et $2^{k-1} < 2^v |x - 2^{-v}m| \leq 2^k$ on obtient que

$$|y - x| \leq |y - 2^{-v}m| + |x - 2^{-v}m| < n 2^{-v} + 2^{k-v} < 2^{k-J-h_n}, \quad h_n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que y est situé dans une boule $B(x, 2^{k-j-h_n})$. En outre, du fait que

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < 2^{k-j-c_n} + 2^{-J} < 2^{k-J-c_n}, \quad c_n \in \mathbb{N},$$

nous avons que y est situé dans une boule B_{J-k-c_n} . Par conséquent, (3.1.14) ne dépasse pas

$$c 2^{(v-j)n/t} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)k} \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{J-k-c_n}} \right) (x),$$

pour toute $x \in B_J$ et toute $0 < t < \min(1, p)$. Où $c > 0$ est indépendant de v, j et J . Donc utiliser **Proposition 1.1.1** (à l'aide de (3.1.5)) et le fait que la fonction maximale de Hardy-Littlewood \mathcal{M}_t est bornée sur L^p on obtient pour toute M suffisamment grand pour que $M > n/t + \tau n$,

$$\begin{aligned} & (\sigma_3)^d \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)kd} \times \\ & \quad \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} \left(\sum_{v=j}^{\infty} 2^{(j-v)(L+n+1+s-n/t)d} \left\| \mathcal{M}_t \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{J-k-c_n}} \right) \right\|_p^d \right)^{q/d} \right)^{d/q} \\ & \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)kd} \left(\sum_{j=J^+}^{\infty} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{js} |\lambda_{jm}| \chi_{jm} \right\|_{L^p(B_{J-k-c_n})}^q \right)^{d/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M)kd} \left(\sum_{j=(J-k-c_n)^+}^{\infty} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{js} |\lambda_{jm}| \chi_{jm} \right\|_{L^p(B_{J-k-c_n})}^q \right)^{d/q} \\
 &\leq c 2^{-J\tau nd} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n/t-M+\tau n)kd} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}^d \leq c 2^{-J\tau nd} \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}^d, \tag{3.1.15}
 \end{aligned}$$

où $d = \min(1, p, q)$. Maintenant, par (3.1.11), (3.1.13) et (3.1.15) nous obtenons

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}} \leq c \|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}}.$$

Dans le **F**- cas, nous faisons les mêmes estimations et calculs que ci-dessus et utilisons la délimitation de \mathcal{M}_t sur $L^p(\ell_q)$ pour $0 < t < \min(1, p, q)$ pour obtenir l'estimation souhaitée.

3.2 La convergence

Dans cette section, nous présentons la preuve de la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ du (3.1.6). Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par (3.1.1) -(3.1.2) et l'expansion de **Taylor** de φ à l'ordre L par rapport aux off-points $2^{-v}m$, on obtient pour v fixé

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \varrho_{vm}(y) \varphi(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} 2^{-v(L+1)} \varrho_{vm}(y) \left(\varphi(y) - \sum_{|\beta| \leq L} (y - 2^{-v}m)^\beta \frac{D^\alpha \varphi(2^{-v}m)}{\beta!} \right) 2^{v(L+1)} dy.
 \end{aligned}$$

Le dernier term est estimé par

$$c (1 + |y|^2)^{\frac{M}{2}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{M}{2}} \sum_{|\beta| \leq L+1} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

où $M > 0$ est à notre disposition, soit $0 < t < \min(1, p) = 1 + p + \frac{p}{\min(1,p)}$ et $\alpha = s + \frac{n}{p}(t-1)$ telles que $n \left(1 - \frac{1}{\min(1,p)}\right) + s < -1 - L$ Puisque ϱ_{vm} sont $[K, L]$ -atomes, alors pour chaque $S > 0$ On a

$$2^{-v(L+1)} |\varrho_{vm}(y)| \leq 2^{\alpha v} 2^{-v(L+1+\alpha)} (1 + 2^v |y - 2^{-v}m|)^{-s}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \varrho_{vm}(y) \varphi(y) dy \right| \\
 & \leq c 2^{-v(L+1+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\alpha v} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |y - 2^{-v}m|)^{-s} (1 + |y|^2)^{\frac{-M}{2}} dy \\
 & = 2^{-v(L+1+\alpha)} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{C_i} \dots\dots\dots dy,
 \end{aligned}$$

où $C_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq 1\}$ et $C_i = \{y \in \mathbb{R}^n : 2^{i-1} \leq |y| < 2^i\}$ pour toute $i \in \mathbb{N}$. Une modification des arguments utilisés dans la preuve de **(3.1.10)** donne:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\alpha v} |\lambda_{vm}| (1 + 2^v |y - 2^{-v}m|)^{-s} \leq c \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(n-S)k} \mathcal{M} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{vs} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{-i-k-h_n}(0)} \right) (y)$$

pour toute $y \in C_i$ est une boule $B_{-i-k-h_n}(0)$ de centrée à 0 et de rayon 2^{i+k+h_n} , $h_n \in \mathbb{N}$

Nous avons divisé M en $R + T$. Ensuite

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{vm} \varrho_{vm}(y) \varphi(y) dy \right|,$$

est estimée par

$$c 2^{-v(L+1+\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{(n-S)k+iR} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\alpha v} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{-i-k-h_n}(0)} \right) (y) (1 + |y|^2)^{\frac{-T}{2}} dy.$$

Puisque nous avons en plus le facteur $(1 + |y|^2)^{\frac{-T}{2}}$, il découle de l'inégalité de **Hölder** que cette expression est limité par

$$\begin{aligned}
 & c 2^{-v(L+1+\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{(n-S)k+iR} \left\| \mathcal{M} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\alpha v} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \chi_{B_{-i-k-h_n}(0)} \right) \right\|_{L^{\frac{p}{t}}} \\
 & \leq c 2^{-v(L+1+\alpha)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{(n-S)k+iR} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\alpha v} |\lambda_{vm}| \chi_{vm} \right\|_{L^{\frac{p}{t}}(B_{-i-k-h_n}(0))} \\
 & \leq c 2^{-v(L+1+\alpha)} \|\lambda\|_{b_{\frac{p}{t}, \infty}^{s, \tau}},
 \end{aligned}$$

où la première inégalité découle de la continuité de la fonction maximale de **Hardy-Littlewood** \mathcal{M} sur $L^{\frac{p}{t}}$ et la deuxième inégalité s'ensuit en prenant S et R assez grands. Puisque $L+1+\alpha > 0$, la convergence de **(3.1.6)** est maintenant claire par les embarquements la preuve est terminée

$$\|\lambda\|_{b_{p,q}^{s,\tau}} \hookrightarrow \|\lambda\|_{b_{\frac{p}{t},\infty}^{s,\tau}},$$

et

$$\|\lambda\|_{f_{p,q}^{s,\tau}} \hookrightarrow \|\lambda\|_{f_{\frac{p}{t},\infty}^{s,\tau}} \hookrightarrow \|\lambda\|_{b_{\frac{p}{t},\infty}^{s,\tau}}.$$

Conclusion

Dans notre travail on donne la décompositions atomique d'espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin. Tous ces résultats sont des généralisations des résultats classiques connus dans les espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin où en prenant $\tau = 0$.

Bibliographie

- [1] Drihem. D, Atomic decomposition of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. Sci.China. Math. 56 (2013), no. 5, 1073–1086.
- [2] Frazier. M, Jawerth. B, A discrete transform and decomposition of distribution spaces. J. Funct. Anal 93 (1) (1990), 34–170.
- [3] Frazier. M, Jawerth. B, Decomposition of Besov spaces. Indiana Univ Math J, 1985, 34: 777–799.
- [4] Frazier. M, Jawerth. B, Weiss. G, Littlewood-Paley theory and the study of function Spaces. CBMS Reg Conf Ser Math, 79. Providence, RI: AMS, 1991.
- [5] Kempka. H, Atomic, molecular and wavelet decomposition of 2-microlocal Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable integrability. Funct Approx, 2010, 43: 171–208.
- [6] Sawano. Y, Yang. D, Yuan. W, New applications of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. J. Math. Anal. Appl 363 (1) (2010), 73–85.
- [7] Yang. D, Yuan. W, A new class of function spaces connecting Triebel-Lizorkin spaces and Q spaces. J Funct. Anal, 2008, 255: 2760–2809
- [8] Yang. D, Yuan. W, New Besov-type spaces and Triebel-Lizorkin-type spaces including Q spaces. Math. Z., 2010, 265: 451–480.
- [9] Yang. D, Yuan. W, Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces via maximal functions and local means. Nonlinear Anal 73 (2010), 3805–3820.

- [10] Yang. D, Yuan. W, Relations among Besov-type spaces, Triebel-Lizorkin-type spaces and generalized Carleson measure spaces. *Appl. Anal* 92(3)(2013) 549–561.
- [11] Yuan. W, Sickel. W, Yang. D, Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2005, Springer-Verlag, Berlin 2010.